

# 工程數學 Midterm #2 Dec, 8 2020

1. 請使用 Cauchy-Euler 法，求下列變係數 ODE 之通解 (配分 15 分)

$$x^2y'' + 2xy' - 2y = 6x$$

2. 求逆轉換: (配分 15 分，每小題 5 分)

$$L^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+7}\right\}$$

3. 求  $L\{f(t)\}$  (配分 15 分, 每小題 5 分)

(1):  $f(t) = 2t^4$

(2):  $f(t) = (1 + e^{2t})^2$

(3):  $f(t) = t + 10$

4. 求逆轉換 (配分 15 分)

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)}\right\}$$

5. 求解 ODE (配分 10 分)

$$y' + 6y = e^{4t}, y(0) = 2$$

6. 求解 ODE (配分 15 分)

$$y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3$$

7. 積分轉換 (配分 15 分, 每小題 5 分)

(1):  $L\left\{\int_0^t e^\tau d\tau\right\}$     (2):  $L\left\{\int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau\right\}$     (3):  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+25)}\right\}$

- 求  $y_h$ : Auxiliary equation:  $m^2 + am + b = 0$  根為:  $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ 
  - <1>相異實根:  $m_1, m_2$  ODE 通解為:  $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$
  - <2>實數重根:  $m$  ODE 通解為:  $y = (c_1 + c_2 x) e^{mx}$
  - <3>複數根 (共軛虛根):  $\alpha \pm \omega i$  ODE 通解為:  $y = e^{\alpha x} (A \cos \omega x + B \sin \omega x)$

- 未(待)定係數法 (Cauchy-Euler equation)

令  $t = \ln x$  (以  $t$  取代  $x$ )

$$xy' = D_t y$$

$$x^2 y'' = D_t(D_t - 1)y$$

$$x^3 y''' = D_t(D_t - 1)(D_t - 2)y$$

- Laplace 轉換

	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$		$f(t)$	$\mathcal{L}(f)$
1	1	$1/s$	7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
2	$t$	$1/s^2$	8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
3	$t^2$	$2!/s^3$	9	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
4	$t^n$ ( $n = 0, 1, \dots$ )	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	10	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
5	$t^a$ ( $a$ positive)	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	11	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$
6	$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	12	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$

First Shifting Theorem, $s$ -Shifting $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$ $e^{at} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}$	Laplace Transform of Derivatives $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0)$ $\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0)$ $\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
--	--

### Laplace Transform of Integral 積分轉換

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s), \quad \text{thus} \quad \int_0^t f(\tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} F(s)\right\}$$