

**計算小錯誤無部份給分**，請仔細作答

答案卷請務必在每一張寫上姓名、學號，沒寫不算分；若題目未說明，則求解 ODE:

Total 100 points; 10 points each.

(10 分) 1.  $(1+x)dy - ydx = 0$  ; 註：不需展開  $\ln|y|$ , ODE 的解作答可寫  $\ln|y| = \dots$

(10 分) 2.  $y'' = -y$      $y(0) = 3$ ,  $y'(0) = 5$

(10 分) 3.  $xy' = x + y$  為齊次 ODE, 可令  $u(x) = \frac{y}{x}$  註：不需展開  $\ln|u|$

4.  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 6x + 2$  has an integrating factor  $I(x)$ , 註：必須寫下計算過程

(10 分) 4-1. Find  $I(x)$

(10 分) 4-2. Solve the ODE

(10 分) 5.  $(5y - 2x)y' = 2y$

(10 分) 6.  $y'' + 3y' + 2y = 6$

(20 分) 7.  $y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$

(10 分) 8.  $4y'' + y' = 0$

## 公式表

求  $y_h$ :

Auxiliary equation:  $m^2 + am + b = 0$       根為:  $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

$\sqrt{a^2 - 4b}$  解有三種可能:

<1>相異實根:  $m_1, m_2$

ODE 通解為:  $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

<2>實數重根:  $m$

ODE 通解為:  $y = (c_1 + c_2 x) e^{mx}$

<3>複數根 (共軛虛根):  $\alpha \pm \omega i$

ODE 通解為:  $y = e^{\alpha x} (A \cos \omega x + B \sin \omega x)$

求  $y_p$ :

Undetermined coefficients method (未定係數法):

$R(x)$	$y_p$ 假設型
$k$	$A$
$e^{ax}$	$Ae^{ax}$
$\cos bx$ 或 $\sin bx$	$A \cos bx + B \sin bx$
$x^n$	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x^1 + A_0$
$cx^n$	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x^1 + A_0$
$x^n e^{nx}$	$e^{nx} (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x^1 + A_0)$
$cx^n e^{nx}$	$e^{nx} (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x^1 + A_0)$
$x^n \cos bx$ 或 $x^n \sin bx$	$(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x^1 + A_0) \cos bx + (B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_1 x^1 + B_0) \sin bx$

註:  $a, b, c, k, n, A, B$  為常數