

答案卷請務必在每一張寫上姓名、學號，沒寫不算分。請求出下列各 ODE 的解

1. [12 分] 階數(Order)、次數(Degree) 判斷，下列 ODE 的階數、次數為？每一格 2 分

1-1.  $(2x + 3y - 2)dx + (3x - 4y + 1)dy = 0$  階數: \_\_\_\_\_ 次數: \_\_\_\_\_

1-2.  $y'' + 3y^3 + 2 = e^x$  階數: \_\_\_\_\_ 次數: \_\_\_\_\_

1-3.  $x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = x^3$  階數: \_\_\_\_\_ 次數: \_\_\_\_\_

在答案卷請標示清楚 1-1:   階   次；1-2:   階   次；1-3:   階   次

2. [8 分] 繪製方向場

$$\frac{dy}{dx} = 1 - xy \quad \text{標記出方向場經過 } \left(3, \frac{-1}{3}\right) \text{ 與 } (2, -1) \text{ 二點之斜率, 且須畫出經過前述二點的 isocline}$$

3. 求出下列 ODE 的解，請依題意求出 General solution 或 Particular solution:

3-1. [5 分]  $(1 + x)dy - ydx = 0$

3-2. [10 分]  $(x^2 + 1)dx = (y^2 + 1)dy$

3-3. [10 分]  $dx = \frac{3\cos 2y + 8\sin 4y}{x^2 + x} dy$

3-4. [10 分]  $x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy = x^3$

3-5. [10 分]  $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 1$  提示: 有積分因子  $I(x)$

3-6. [10 分]  $y'' - 6y' + 8y = 0$

3-7. [15 分]  $y'' - y' + 20y = 100x^2$ , ( $y_h$ : 5 分,  $y_p$ : 10 分)

3-8. [10 分]  $(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$

## 公式表

求  $y_h$ :

Auxiliary equation:  $m^2 + am + b = 0$

根為:  $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

$\sqrt{a^2 - 4b}$  解有三種可能:

<1>相異實根:  $m_1, m_2$

ODE 通解為:  $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

<2>實數重根:  $m$

ODE 通解為:  $y = (c_1 + c_2 x) e^{mx}$

<3>複數根 (共軛虛根):  $\alpha \pm \omega i$

ODE 通解為:  $y = e^{\alpha x} (A \cos \omega x + B \sin \omega x)$

求  $y_p$ :

Undetermined coefficients method (未定係數法):

$R(x)$	$y_p$ 假設型
$k$	$A$
$e^{ax}$	$Ae^{ax}$
$\cos bx$ 或 $\sin bx$	$A \cos bx + B \sin bx$
$x^n$	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x^1 + A_0$
$c x^n$	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x^1 + A_0$
$x^n e^{nx}$	$e^{nx} (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x^1 + A_0)$
$c x^n e^{nx}$	$e^{nx} (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x^1 + A_0)$
$x^n \cos bx$ 或 $x^n \sin bx$	$(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x^1 + A_0) \cos bx + (B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_1 x^1 + B_0) \sin bx$

註:  $a, b, c, k, n, A, B$  為常數