

第一題請填空，第二題請畫圖，第三~八題請求解  
評分標準，全對給分，除非微小計算錯誤才有部分給分

1. (配分 10 分) 錯一格扣 2 分，扣完為止

$$\text{ODE: } x^4 y^{(4)} + x^2 y'' = 5x^2 + 3 \quad \dots \dots \dots (1)$$

利用 Cauchy-Euler 方法

令  $t = \ln x$  可推得， $xy' = \frac{dy}{dt} = D_t y$

$$X^2 y'' = D_t(D_t - 1)y$$

$$X^3 y''' = D_t(D_t-1)(D_t-2)y$$

$$X^4y^{(4)} = D_t(D_t-1)(D_t-2)(D_t-3)y$$

帶回(1)式，可得新的常係數 ODE 為：

..(2)

請問 (1)與(2)式的 階數(Order)、次數(Degree)、自變數(Independent variable)、應變數  
(Dependent variable) 各為多少？

作答：

(2) 式為：

	Order	Degree	Independent variable	Dependent variable
(1)式				
(2)式				

2. (配分 10 分) 畫 direction field

$\frac{dy}{dx} = x$ , 至少需畫出經過下列三點的 direction field 以及 isocline ,  
 $(1, -2), (1, -1), (2, 2)$

3. (配分 10 分)  $\frac{dy}{dx} = \sin 5x$

4. (配分 10 分)  $(2y - 2)\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x + 2 \quad y(1) = -2$

5. (配分 15 分)  $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$

6. (配分 15 分)  $(x - y)dx + xdy = 0, \Leftrightarrow y = ux$

7. (配分 15 分)  $(e^{2y} - y \cos xy)dx + (2xe^{2y} - x \cos xy + 2y)dy = 0, \quad y(1)=0$

8. (配分 15 分)  $y'' + 3y' + 2.25y = -10 e^{-1.5x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0)=0$

## 公式表

求  $y_h$ :

$$\text{Auxiliary equation: } m^2 + am + b = 0$$

$\sqrt{a^2 - 4b}$  解有三種可能:

<1>相異實根:  $m_1, m_2$

ODE 通解為:  $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$

<2>實數重根:  $m$

ODE 通解為:  $y = (c_1 + c_2 x) e^{mx}$

<3>複數根 (共軛虛根):  $\alpha \pm \omega i$

ODE 通解為:  $y = e^{\alpha x} (A \cos \omega x + B \sin \omega x)$

求  $y_p$ :

Undetermined coefficients method (未定係數法):

$R(x)$	$y_p$ 假設型
$k$	$A$
$e^{ax}$	$Ae^{ax}$
$\cos bx$ 或 $\sin bx$	$A \cos bx + B \sin bx$
$x^n$	$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x^1 + A_0$
$x^n e^{nx}$	$e^{nx} (A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x^1 + A_0)$
$x^n \cos bx$ 或 $x^n \sin bx$	$(A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x^1 + A_0) \cos bx$ $+ (B_n x^n + B_{n-1} x^{n-1} + \dots + B_1 x^1 + B_0) \sin bx$