

ID: _____ Name: _____

滿分 20 分。可不用寫過程、無部份給分。

[4%, 各 2 分] (1) 求出 $f(x)$ 的傅立葉級數的 a_n 與 b_n

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad (\text{週期為 } 2\pi)$$

[4%, 各 2 分] (2) 求出 $f(x)$ 傅立葉級數的 a_n 與 b_n

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \end{cases} \quad (\text{週期為 } 2)$$

[4%, 各 2 分] (3) 求出 $f(x)$ 傅立葉級數的 a_n 與 b_n

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -5 < x < 0 \\ 1+x, & 0 \leq x < 5 \end{cases} \quad (\text{週期為 } 10)$$

[2%] (4) 求出 $f(x)$ 傅立葉級數的 a_n

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & -\pi < x < 0 \\ x+1, & 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad (\text{週期為 } 2\pi)$$

[2%] (5) 求出 $f(x)$ 傅立葉級數的 a_n

$$f(x) = x(2-x), \quad 0 < x < 2 \quad (\text{週期為 } 2)$$

[4%, 各 2 分] (6) 求 $f(x) = 10x$ 當 $-\pi < x < \pi$ 且 $f(x + 2\pi) = f(x)$ 之傅立葉級數的 a_n 與 b_n

公式表:

$\sin \pi = 0, \sin 2\pi = 0, \sin 3\pi = 0, \dots \rightarrow$ 傅立葉係數中 a_n 與 b_n 內的 $\sin n\pi$ 可寫成 0
 $\cos \pi = -1, \cos 2\pi = 1, \cos 3\pi = -1, \dots \rightarrow$ 傅立葉係數中 a_n 與 b_n 內的 $\cos n\pi$ 可寫成 $(-1)^n$

傅立葉級數 (週期 $2L$)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

(a) $a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$

(b) $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, \dots$

(c) $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, \dots$

Fourier Cosine Series (*even function, 偶函数*) (週期 $2L$)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x \quad (f \text{ even})$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

Fourier Sine Series (*odd function, 奇函数*) (週期 $2L$)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \quad (f \text{ odd})$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$